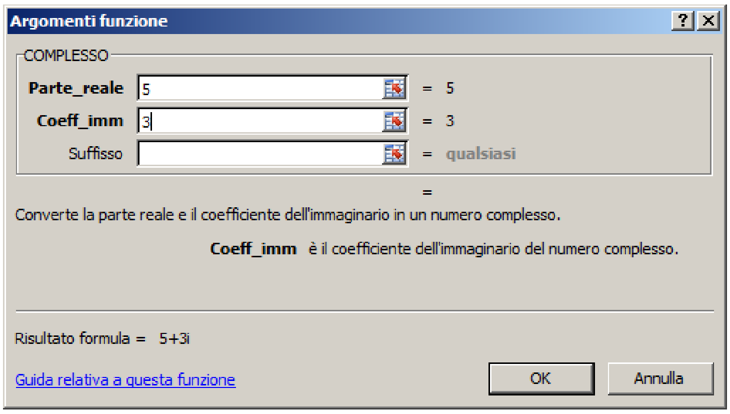
Esercitazione: Elaborazione Numerica di Segnali Tempovarianti

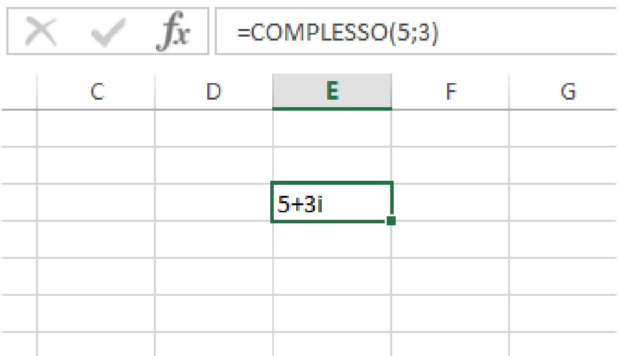
1) Algebra complessa in Excel

Excel consente di eseguire calcoli anche con valori numerici complessi del tipo $a + i \cdot b$ con $i = \sqrt{-1}$ unità immaginaria.

La funzione di Excel che consente di definire numeri complessi si chiama COMPLESSO ed ha due argomenti: parte reale e coefficiente complesso. Opzionalmente si può definire il simbolo del suffisso che di default è il carattere *i*. E' possibile inserire numeri complessi attraverso la finestra di interfaccia (come riportato in figura) o direttamente nella cella scrivendo il comando (***=COMPLESSO(5;3)*** in questo caso).



Il risultato è indicato nella seguente immagine.



Esistono altre funzioni che consentono di eseguire operazioni su numeri complessi come somma, differenza prodotto e quoziente. Ci sono poi operatori che estraggono da un numero complesso parte reale, coefficiente immaginario, modulo e fase.

FUNZIONE	DESCRIZIONE
=COMP.SOMMA(cella1;cella2)	Esegue la somma fra due celle (numeri complessi/reali)
=COMP.DIFF(cella1;cella2)	Esegue la differenza fra due celle (numeri complessi/reali)
=COMP.PRODOTTO(cella1;cella2)	Esegue il prodotto fra due celle (numeri complessi/reali)
=COMP.DIV(cella1;cella2)	Esegue il quoziente fra due celle (numeri complessi/reali)

OPERATORE	DESCRIZIONE
=COMP.MODULO(cella)	Ritorna il modulo di un numero complesso
=COMP.ARGOMENTO(cella)	Ritorna la fase di un numero complesso
=COMP.PARTE.REALE(cella)	Ritorna la parte reale di un numero complesso
=COMP.IMAGINARIO(cella)	Ritorna il coefficiente immaginario di un numero complesso
=COMP.CONIUGATO(cella)	Ritorna complesso coniugato di un numero complesso

Di seguito si riportano alcuni esempi di calcolo con algebra complessa in Excel.

			Re	Im	Modulo	Fase [rad]	Fase [gradi]
Z1	4+3i		4	3	5	0.64	36.87
Z2	5+12i		5	12	13	1.18	67.38
Z1*	4-3i		4	-3	5	-0.64	-36.87
Z1+Z2	9+15i		9	15	17.49	1.03	59.04
Z1+Z1*	8		8	0	8.00	0.00	0.00
Z1*Z2	-16+63i		-16	63	65.00	1.82	104.25
Z1*Z1*	25		25	0	25.00	0.00	0.00
Z1/Z2	0.331360946745562-0.195266272189349i		0.331361	-0.19527	0.38	-0.53	-30.51
Z1/Z1*	0.28+0.96i		0.28	0.96	1.00	1.29	73.74

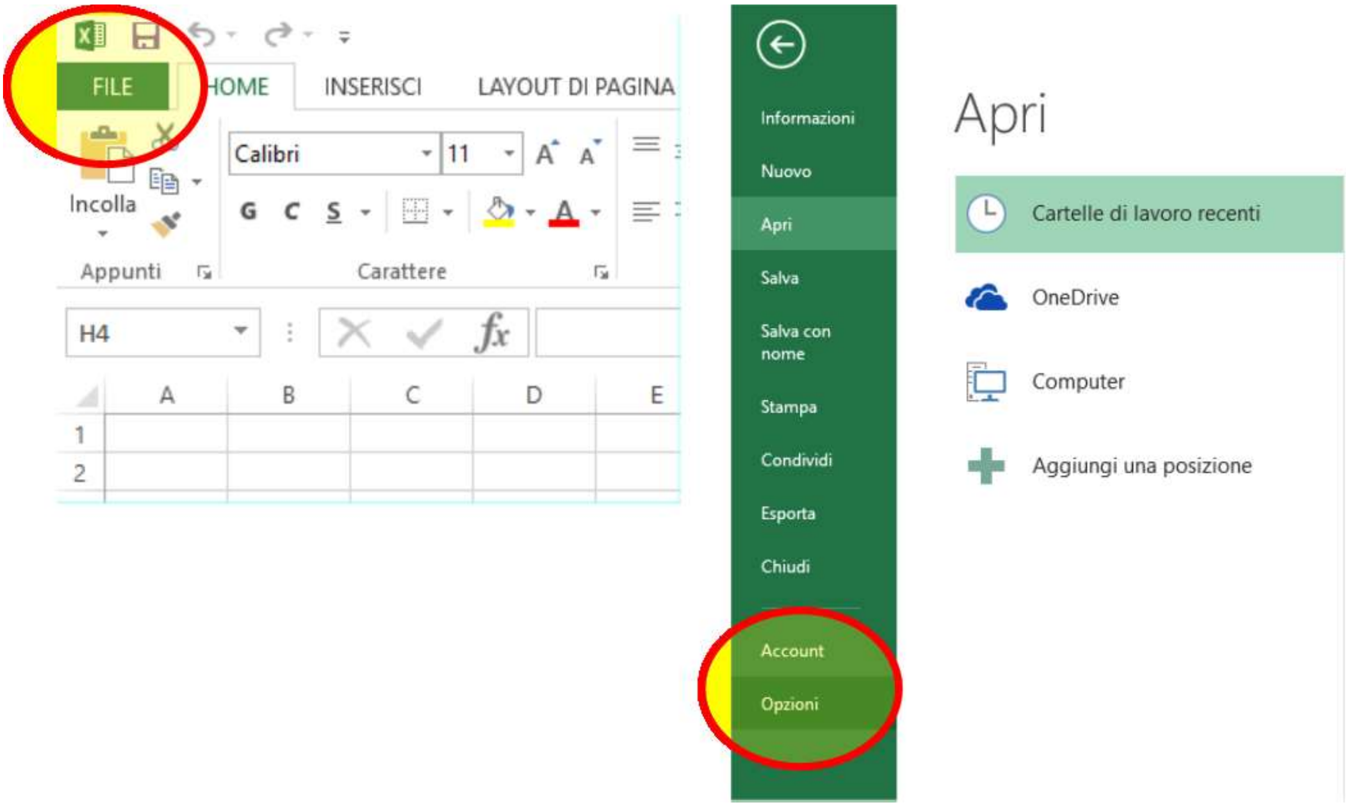
2) Calcolo della FFT in Excel

Si presenta in questo paragrafo come eseguire il calcolo della FFT utilizzando il foglio di calcolo di Excel e come interpretare i risultati forniti dalla routine di calcolo.

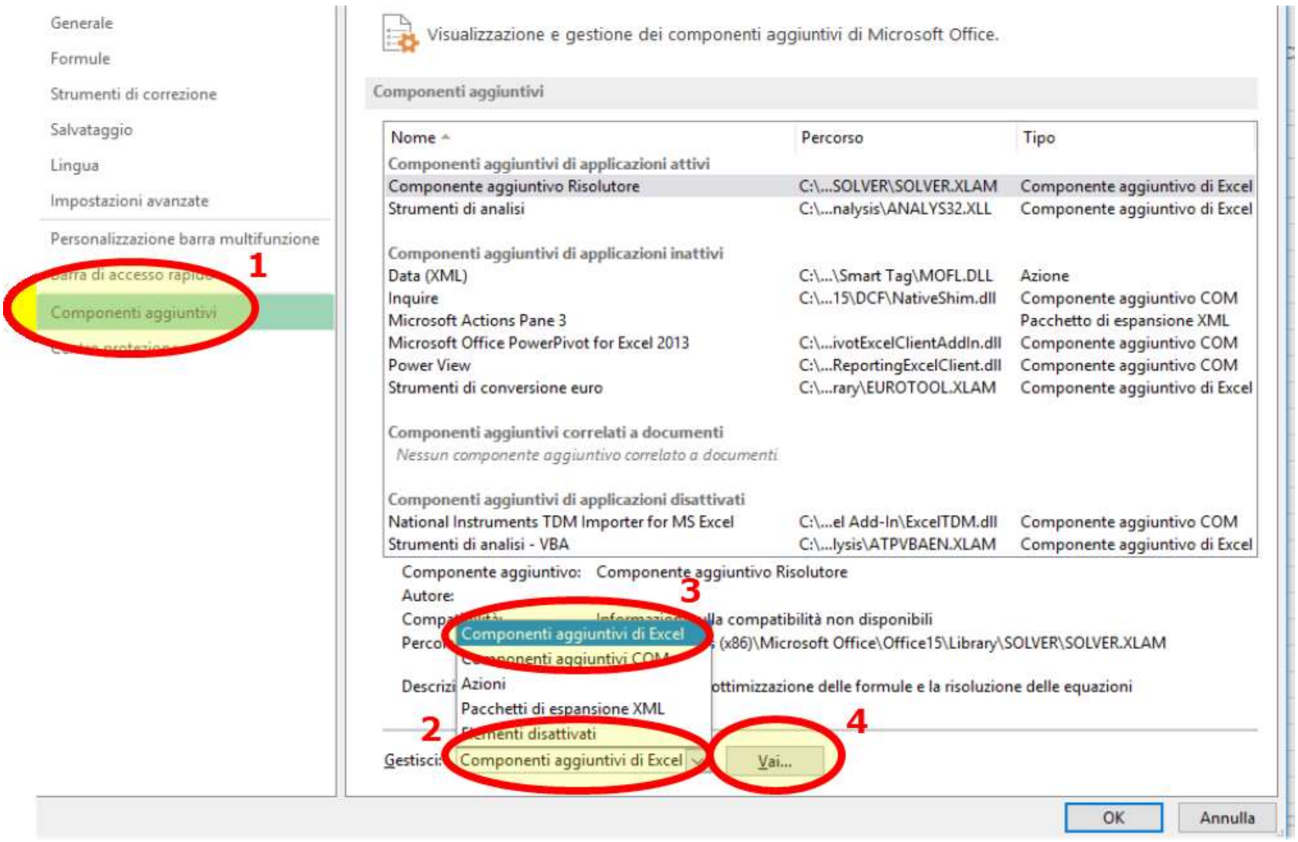
Excel esegue il calcolo della trasformata rapida di Fourier (FFT) solo su un numero di dati che sia potenza di due $N=2^m$ con un numero massimo di campioni da analizzare pari a 4096.

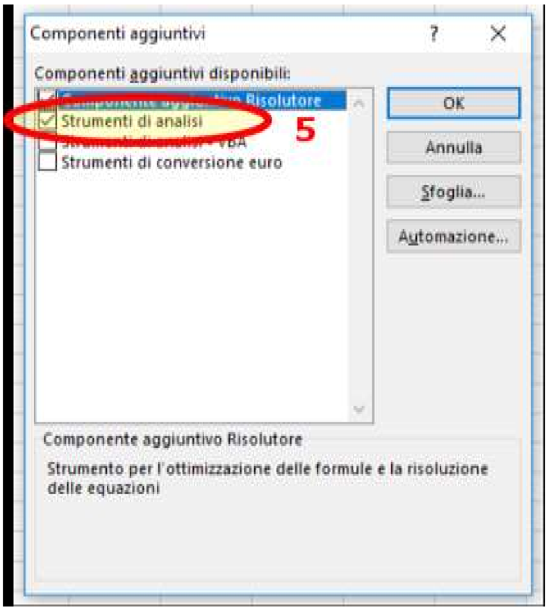
Configurazione di Excel

Nelle versioni comunemente installate del pacchetto Office di Microsoft le funzionalità di Analisi Dati (Analisi di Fourier) non vengono attivate di default. E’ necessario pertanto configurare il proprio sistema per consentire questa potenzialità.



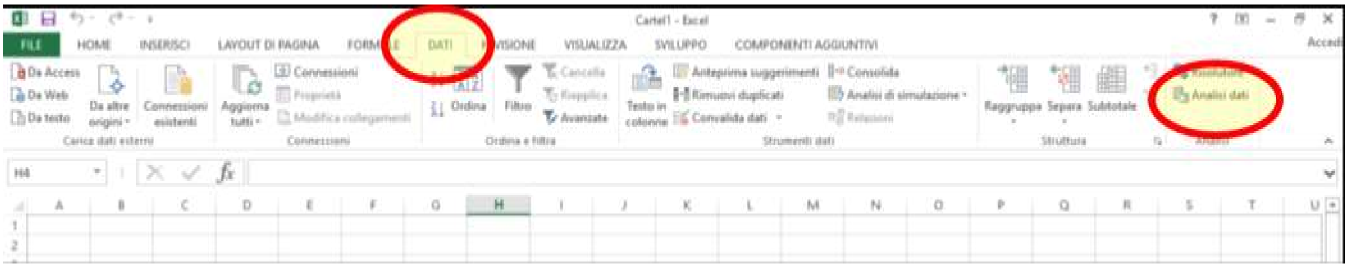
E’ necessario dunque accedere alla finestra delle opzioni e attivare la funzione Strumenti di Analisi.





Nella finestra Componenti Aggiuntivi (1) selezionare la voce Componenti Aggiuntivi di Excel (3). Con Vai (4) appare una seconda finestra e qui è necessario attivare Strumenti di Analisi (5).

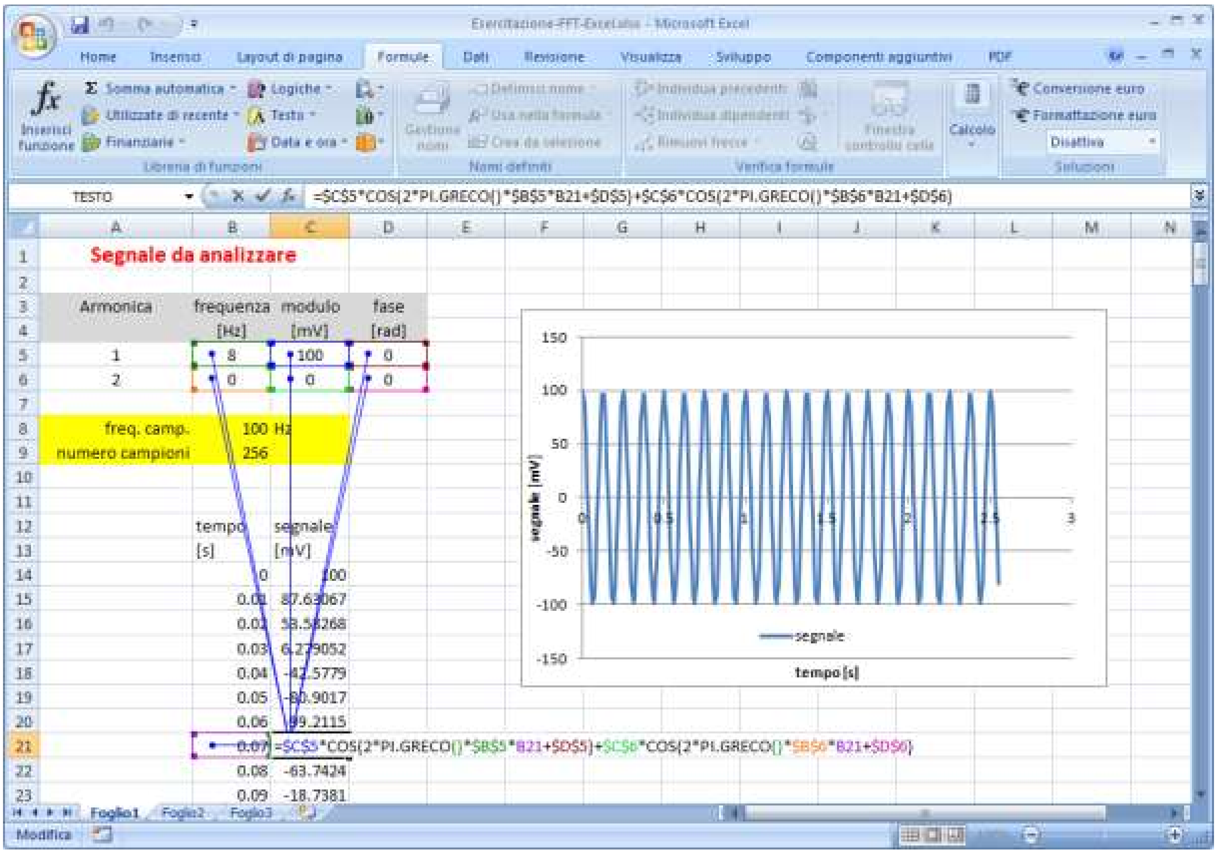
Il risultato ottenuto è di far apparire nel menù **DATI** la voce **Analisi Dati**



Costruzione del segnale da analizzare

Per poter procedere con il calcolo della FFT è necessario costruire un segnale da analizzare. Di seguito viene indicato come procedere.

Nelle colonne B e C costruiamo una serie di N campioni (in questo caso 256) con il valore del tempo, campionato a passo costante con frequenza di campionamento fc pari a 100 Hz (colonna B) e un segnale composto da due armoniche con valore del modulo, della frequenza e della fase assegnati (colonna C).

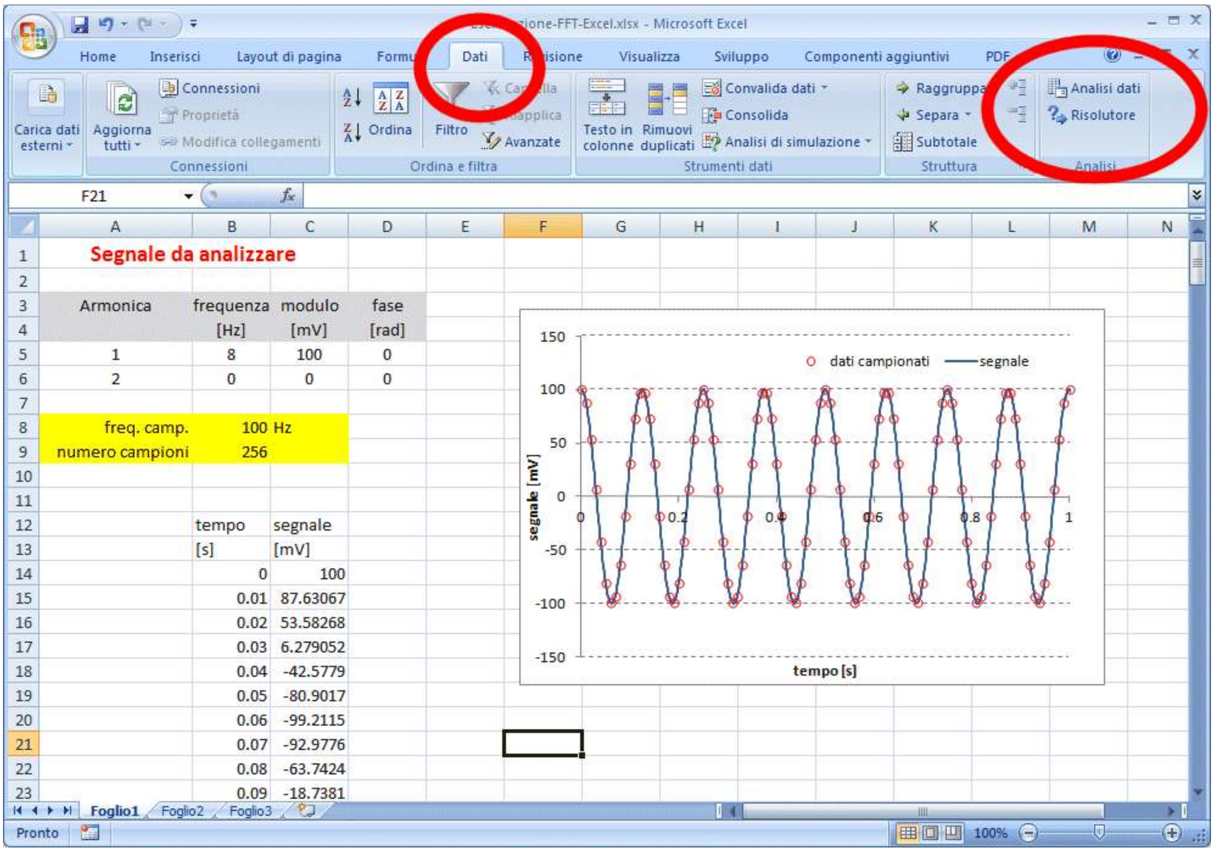


Variando i valori delle celle B5 C5 e D5 è possibile definire la prima armonica, mentre con le celle B6, C6 e D6 è possibile definire la seconda armonica. Nel caso illustrato in figura è definita una sola armonica con frequenza pari a 8 Hz ed ampiezza pari a 100 mV.

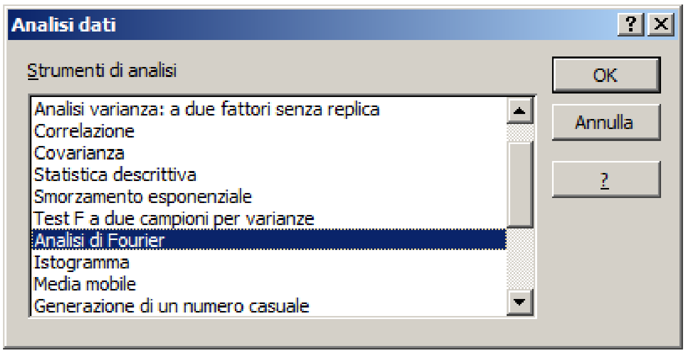
Analisi di Fourier (FFT) tramite Excel

Come abbiamo specificato l'algoritmo implementato all'interno di Excel permette di eseguire la FFT su segnali composti da un numero di campioni pari ad una potenza di due (2^m) con un limite pari a 4096 campioni. In questo esempio si è optato per operare con un numero di campioni pari a $256 = 2^8$.

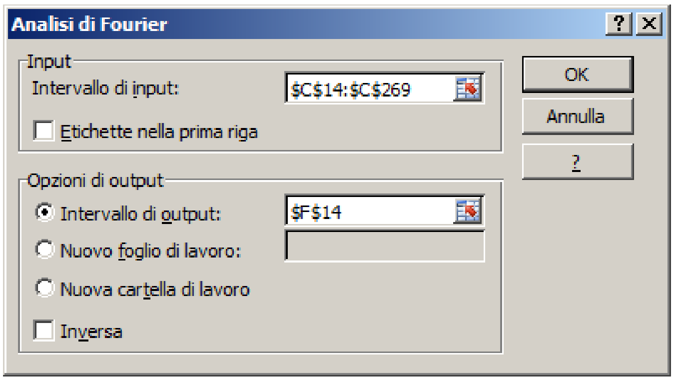
Il comando della FFT si trova nella sezione del menu denominato "Dati" alla voce "Analisi Dati"



Una volta selezionato il comando apparirà un menù dove scegliere la voce “Analisi di Fourier”.



Nella schermata successiva è necessario definire la sorgente dei dati e la destinazione della FFT.



L’**intervallo di input** definisce il segnale da analizzare (celle da C14 a C269 in questo caso - $C$14:$C$269).

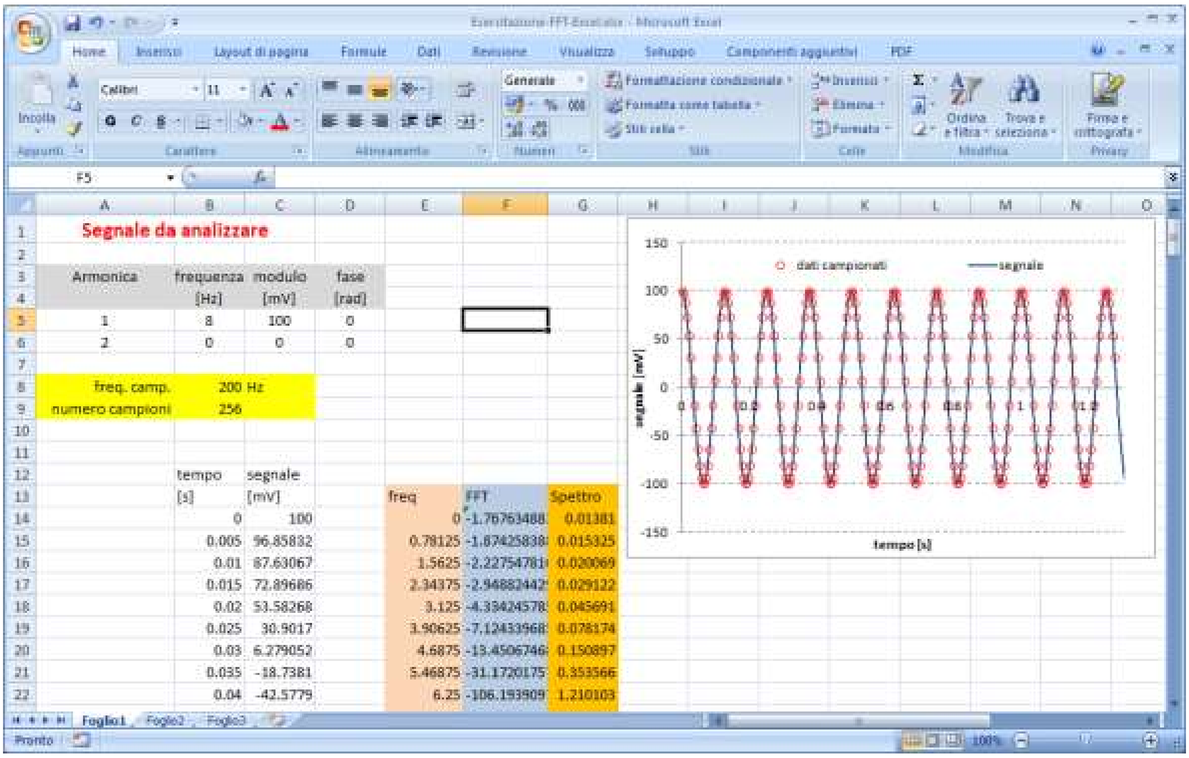
L'**intervallo di output** definisce dove il programma andrà a scrivere i risultati della FFT (cella F14 in questo caso).

Eseguito il comando tramite il bottone OK il programma eseguirà la FFT.

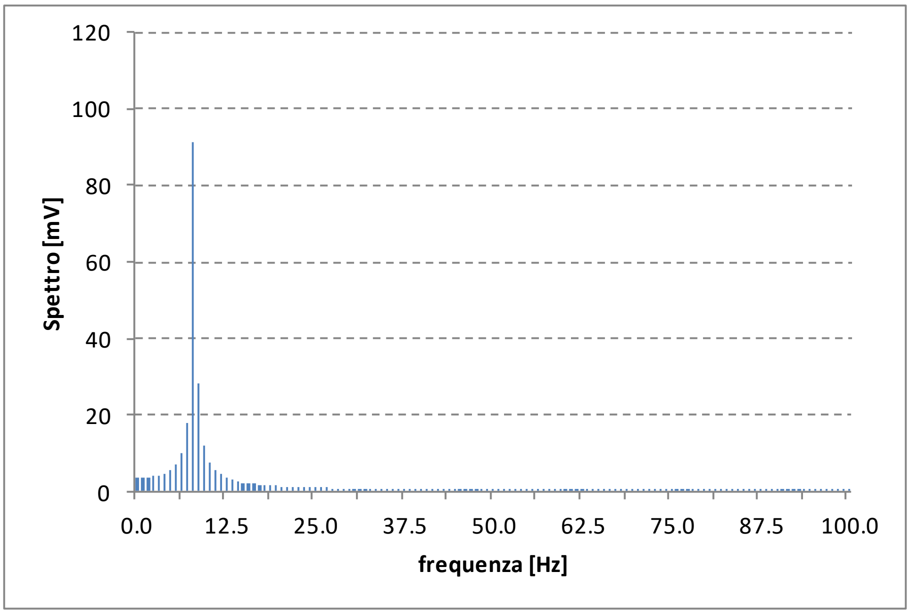
Nella colonna F (dalla riga 14 in avanti) troveremo i valori della FFT del segnale analizzato; si tratta di una serie di numeri complessi (tanti quanti i campioni analizzati), ma solo la prima metà di essi sono significativi. (La seconda metà della serie riporta i valori coniugati della prima parte della FFT specchiata rispetto alla frequenza limite fc/2).

Per poter visualizzare i risultati è necessario:

- definire la colonna delle **frequenze** (colonna E con solo N/2 dati validi) partendo dalla frequenza pari a zero Hz fino all'ultima frequenza utile pari a fc/2 (100 Hz in questo caso) quindi con una spaziatura (risoluzione spettrale) pari a $\Delta f = \frac{fc}{N} = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$
- estrarre il modulo del numero complesso ottenuto e dividerlo per N/2 per ottenere lo **spettro del segnale nel dominio delle frequenze**. (colonna G)



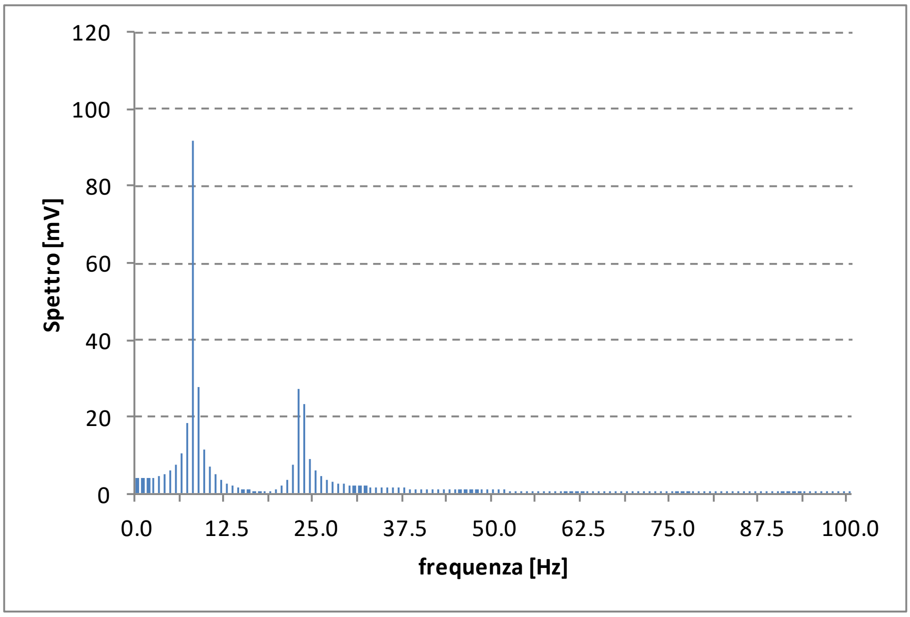
Il risultato che si ottiene costruendo un grafico frequenza-spettro è quello di seguito riportato che indica come il segnale si distribuisce nel dominio delle frequenze.



Il risultato che si ottiene, pur essendo piuttosto interessante, non riporta quello che sarebbe intuitivo pensare, ovvero una sola linea corrispondente a 8 Hz di ampiezza pari a 100 mV. Al contrario si ottiene una serie di linee che aumentano di valore in prossimità di 8 Hz senza mai raggiungere il valore pari a 100 mV. Il fenomeno che si è verificato è quello del Leakage.

Se si osservano i valori numerici si può notare che la riga (linea spettrale) pari a 8 Hz nella tabella dei risultati non esiste, al contrario ci sono linee con valori prossimi a 8 Hz come per esempio 7.81 Hz (riga 24), 8.59 Hz (riga 25). L'energia del segnale si è andata a distribuire principalmente fra queste due linee spettrali (7.81 Hz e 8.59 Hz) che hanno rispettivamente ampiezza di 91 e 28 mV.

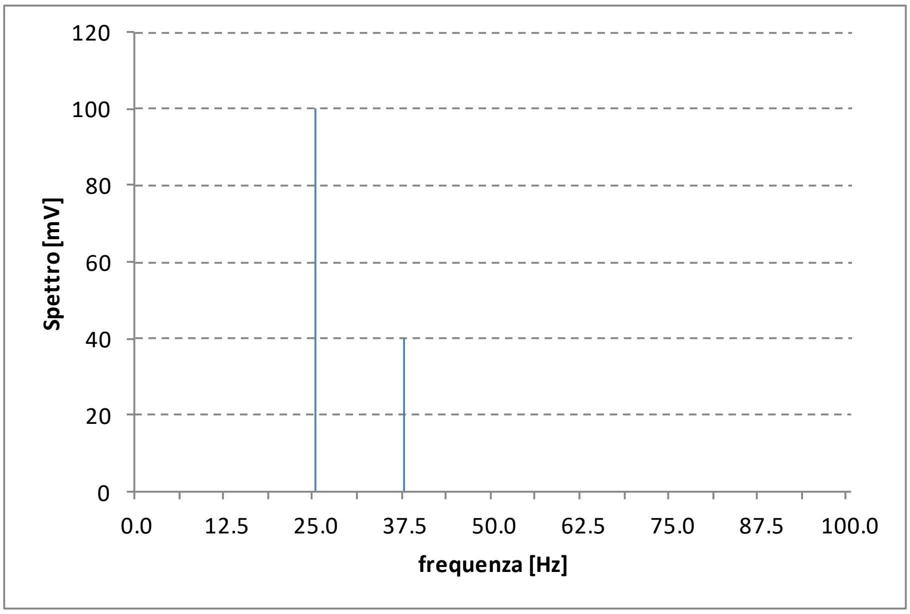
Se si ripete l'analisi cambiando il segnale da analizzare, per esempio introducendo una seconda armonica con frequenza pari a 24 Hz e ampiezza pari a 40 mV si ottiene il grafico sotto riportato. *(ATTENZIONE: il calcolo della FFT non si aggiorna automaticamente cambiando i valori delle altre celle ma è necessario eseguire nuovamente l'analisi attraverso il comando "Analisi Dati" – "Analisi di Fourier" nella sezione "Dati" del menù.)*



Il diagramma riporta le due frequenze a 8 Hz e 24 Hz distribuite nelle righe spettrali adiacenti i due valori.

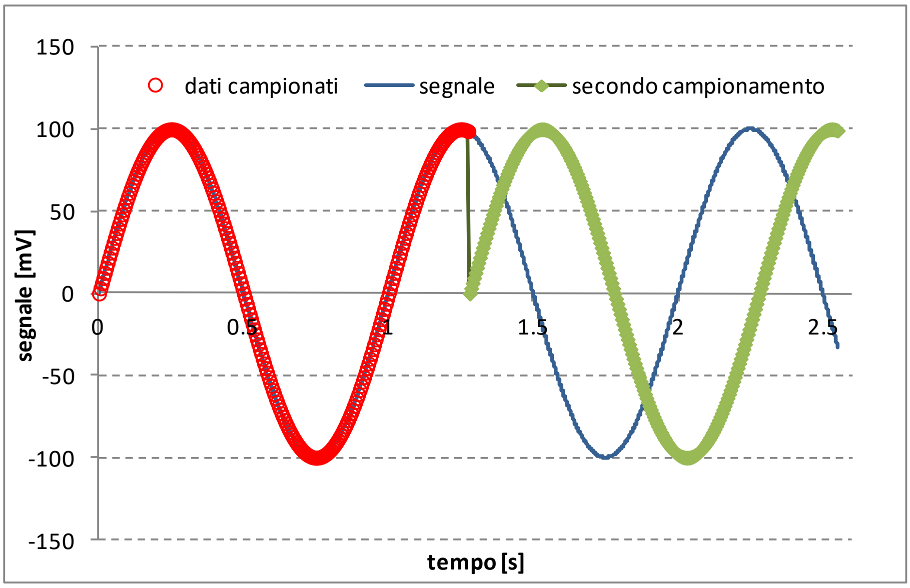
Se infine si opera con un segnale composto da due armoniche a 25 Hz e 37.5 Hz con ampiezza pari a 100 mV e 40 mV rispettivamente, si ottiene il grafico di seguito riportato. Si osservi come le righe che appaiono sono esclusivamente quelle che compongono effettivamente il segnale (25 Hz – riga 146 e 37.5 Hz – riga 62) con ampiezze rispettivamente di 100 mV e 40 mV.

In quest'ultimo caso non si è verificato il fenomeno del Leakage.



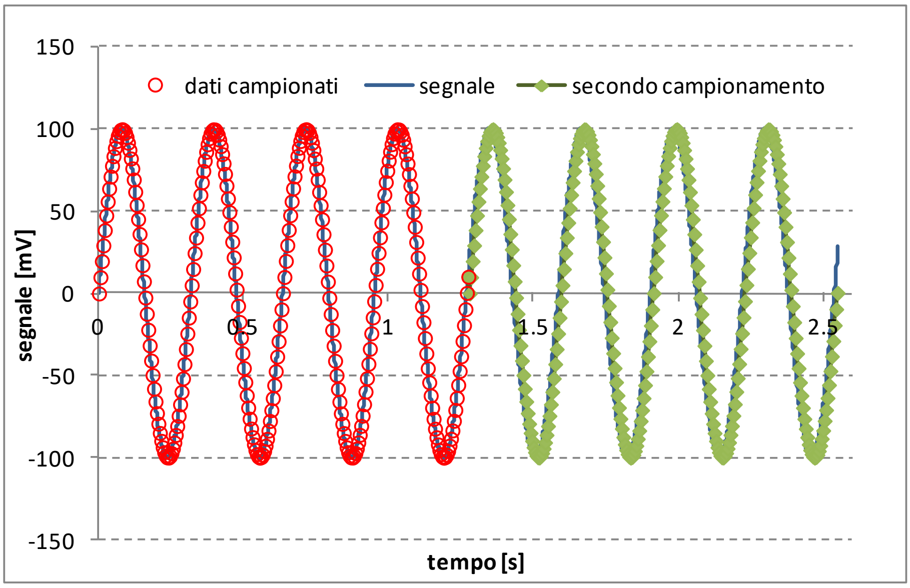
Il fenomeno del Leakage è anche detto "effetto di bordo" ed è dovuto al fatto che il segnale campionato su un periodo finito $T = N \cdot \frac{1}{fc}$ non campiona un numero intero di periodi del segnale periodico da analizzare ma una sua frazione. Nel pensare il segnale periodico come una successione di segnali campionati (finestre rettangolari del segnale) porta ad avere forti discontinuità nei punti di raccordo.

A titolo di esempio nel seguente grafico è riportato il risultato del campionamento di un segnale periodico pensato infinito (segnale blue – 1 Hz) campionato su un tempo finito T = 1.28 s (segnale rosso) ricomposto un una ipotetica seconda campionatura (segnale verde).



La discontinuità fra i segnali rosso e verde si ripresenta nel dominio delle frequenze come fenomeno di Leakage (più bande attorno alla frequenza effettiva del segnale).

Se il segnale (blue) fosse invece a 3.15 Hz (una delle righe spettrali ottenibili tramite FFT) non si avrebbe il fenomeno del Leakage e anche nel dominio del tempo non si osserverebbe alcuna discontinuità.



Finestratura del segnale

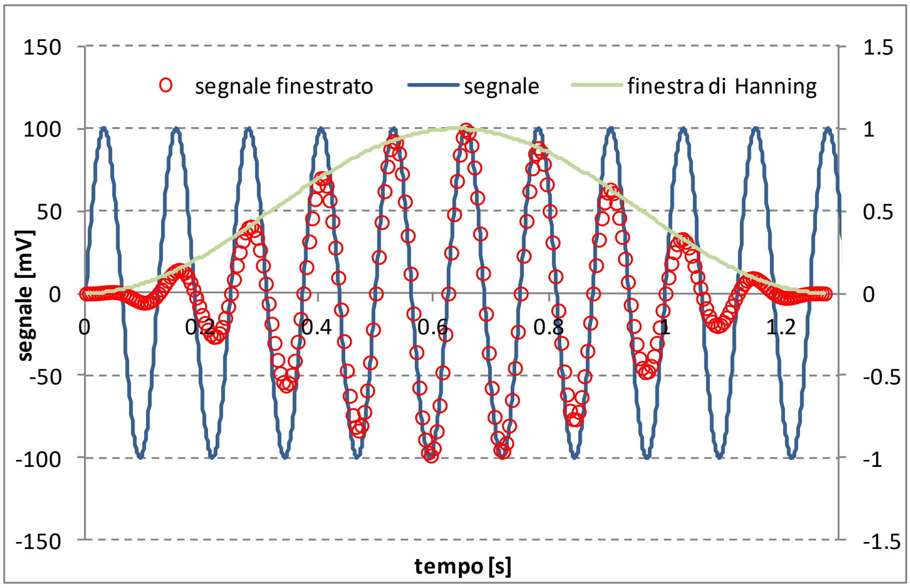
Per limitare il fenomeno del Leakage si procede “finestrando” il segnale prima di eseguire la FFT.

La “finestra” è una funzione $w(t)$nel dominio del tempo che, moltiplicata per il segnale da analizzare $s(t)$ limita gli effetti di bordo. La funzione da analizzare attraverso l’algoritmo della FFT sarà dunque

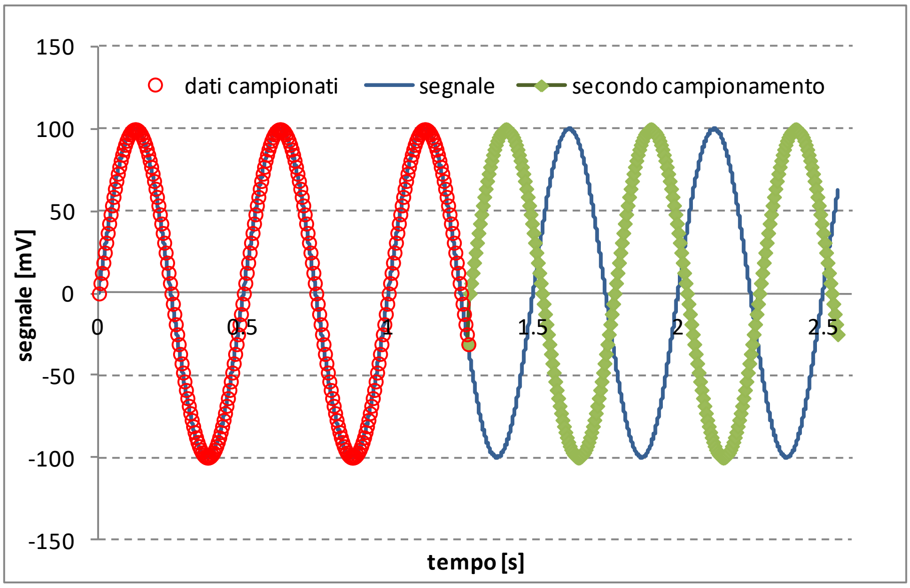
$$sw(t) = w(t) \cdot s(t)$$

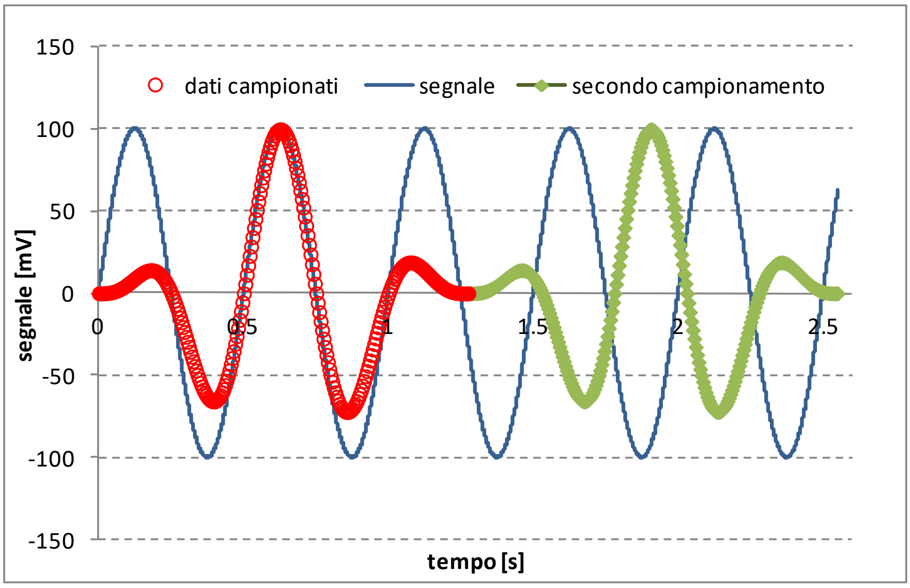
Una delle principali finestre utilizzate è la **finestra di Hanning** la cui equazione è:

$$w(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right)\right] \qquad \text{con} \qquad 0 \leq t \leq T$$

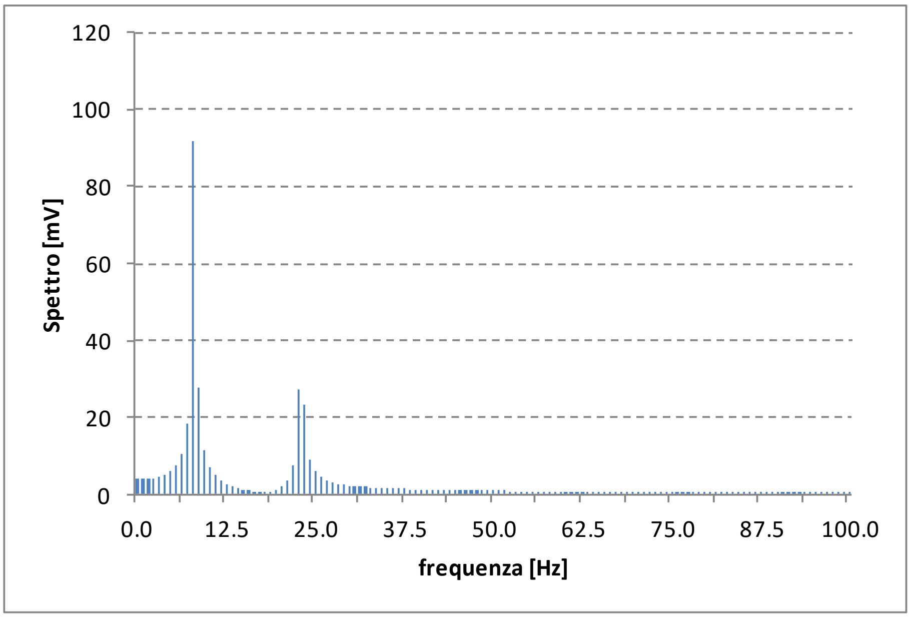


Segnale a 2 Hz naturale (finestra rettangolare) e con finestra di Hanning.

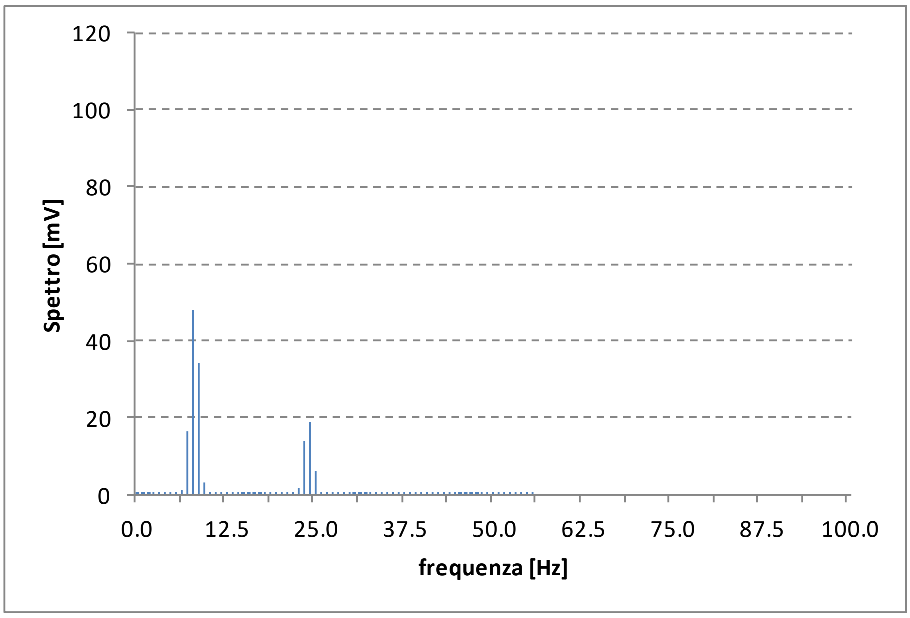




In questi grafici viene riportato lo spettro di un segnale composto da due armoniche a 8 Hz e 24 Hz con ampiezza rispettivamente di 100 mV e 40 mV. Il primo grafico si riferisce allo spettro del segnale non finestrato (finestra rettangolare) mentre il secondo con segnale finestrato (finestra di Hanning).



Segnale non finestrato



Segnale con finestra di Hanning

Si può osservare che l'effetto della finestratura è quello di limitare gl'effetto di bordo limitando la dispersione dell'energia fra le diverse righe spettrali, tuttavia il valore dei picchi viene di molto ridotto dalla finestratura del segnale.

3) Confronto FFT di Excel e programma ElaboraDFT

Per l'esercitazione si propone di utilizzare un semplice programma di calcolo implementato a fini didattici per eseguire il calcolo della FFT (DFT in questo caso) e per fare questo si consiglia di utilizzare il file denominato **Dati2018-01-256.txt**.

Il file contiene 256 campioni acquisiti con una frequenza di campionamento pari a 100 Hz ($\Delta t_c = 0.01\ s$). Si chiede di confrontare lo spettro della FFT fornito dall'algoritmo di Excel con quello elaborato dal programma fornito (denominato ElaboraDFT).

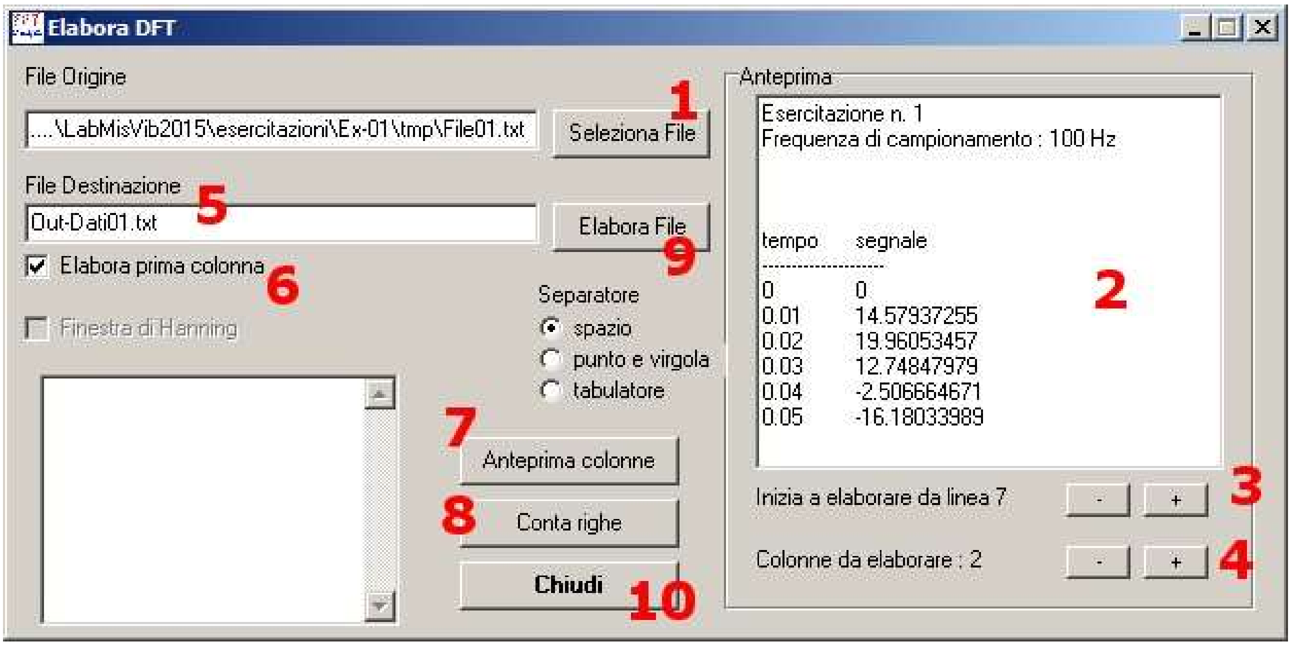
Funzionamento del programma:

Il programma permette di elaborare i dati contenuti in un file di testo (ASCII) fornendo in output la trasformata discreta di Fourier. Non è necessario che il numero di campioni sia potenza di 2 ($N=2^n$) e il file può contenere più colonne di segnali da elaborare.

Il primo passaggio consiste nel selezionare il file da elaborare utilizzando il tasto "Seleziona File" (1).

Nel riquadro a destra (2) compare l'anteprima del file con una divisione fra la sezione di intestazione del file e la porzione destinata ai dati veri e propri. Con i tasti + e – della sezione "inizia a elaborare da linea xx" (3) è possibile definire da dove iniziare ad elaborare il file.

Analogamente è possibile impostare quante colonne elaborare - tasti n. (4).



Nel box (5) è possibile definire il nome del file di output. Con doppio click sul box si accede alla finestra che permette di cambiare cartella.

L'opzione (6) permette di elaborare o meno la prima colonna che spesso è l'indicazione temporale e non va elaborata.

I tasti (7) e (8) permettono di vedere come vengono lette le colonne con "anteprima colonne" e di conteggiare il numero di dati contenuti nel file.

Con il tasto "Elabora File" (9) viene eseguito il calcolo della DFT.

4) Risoluzione in frequenza

Per migliorare la definizione dello spettro si possono aumentare:

- La frequenza di campionamento a pari numero di campioni **Dati2018-02-A.txt**
- Il numero di campioni a pari frequenza di campionamento : **Dati2018-02-B.txt**
- Entrambe le cose : **Dati2018-02-C.txt**

Si chiede di analizzare e commentare i risultati.

5) Finestratura

Utilizzando il file: **Dati2018-01-256.txt** si chiede di confrontare i risultati con e senza finestratura di Hanning sia utilizzando Excel, sia il programma DFT.

Si ricorda che la finestra di Hanning ha la seguente definizione:

$$w(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)\right]$$